

APPLICATION DE LA METHODE DES ELEMENTS
FINIS AU DIMENSIONNEMENT DE SYSTEMES
ELASTIQUES EN MICROMECHANIQUE

Alain Vaucher, Michel Bogdanski et Yves Depeursinge
Laboratoire Suisse de Recherches Horlogères, CH-2000 Neuchâtel

RESUME

Nous présentons tout d'abord, succinctement, le modèle de base ainsi que le problème traité par la méthode des éléments finis.

A l'aide de quelques exemples, nous montrons les limites et les possibilités de la méthode dans un cas d'optimisation et dans un cas de construction.

La comparaison des résultats théoriques et des mesures permet de présenter la détermination des paramètres physiques.

I. Introduction

Le but de ce travail est de présenter une méthode permettant de dimensionner et d'optimiser des systèmes élastiques.

Ce problème peut être abordé de différentes manières :

- par des mesures expérimentales
- par la théorie de la résistance des matériaux
- par des programmes spécifiques
- par la méthode des éléments finis
- Les mesures expérimentales sur des prototypes nous renseignent directement sur le comportement du système fabriqué. Il est cependant long et fastidieux de vouloir améliorer les performances d'une pièce uniquement à l'aide de résultats expérimentaux, par des modifications successives. Le coût de l'outillage est en effet prohibitif.
- Une approche à l'aide des lois de la résistance des matériaux est très vite impossible, dès que la géométrie se complique. Pour une forme relativement simple, telle que celle présentée sur la Fig. 1, les hypothèses de simplification (approximations par des poutres droites) permettent de situer les ordres de grandeurs des tensions et des déplacements. Une représentation aussi grossière de la géométrie rend les possibilités d'optimisation utopiques.

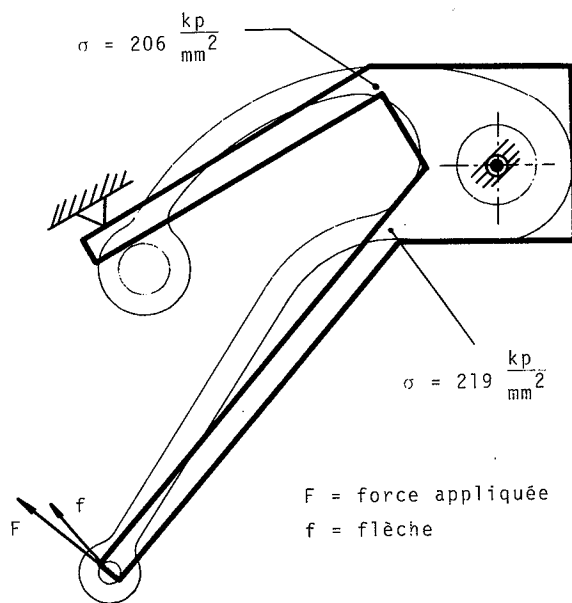


Fig. 1 : Approche d'un problème par les lois de la résistance des matériaux

- Pour des géométries typiquement "linéaires", rencontrées souvent en horlogerie, il existe des programmes spécifiques qui donnent des résultats partiels intéressants et suffisants pour dimensionner les constructions [1].
- La méthode des éléments finis est un outil d'analyse puissant. Elle permet d'abord la reproduction aussi fidèle que voulue de la géométrie d'une pièce par le choix d'un maillage

approprié. Elle livre ensuite les valeurs des contraintes et des déplacements en n'importe quel point.

Sur la base des résultats obtenus, on peut vouloir changer la forme de la pièce traitée. Il suffit alors de modifier le maillage en fonction des nouvelles données géométriques, ce qui peut s'effectuer rapidement, et de relancer le programme de calculs. Il s'ensuit une procédure d'optimisation très efficace. Comme exemple d'une telle démarche, nous présentons l'analyse, puis l'optimisation d'un ressort de cliquet à deux lames (Fig. 2).

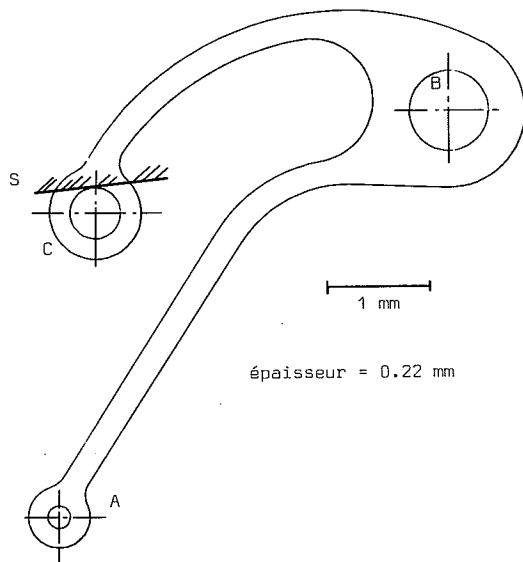


Fig. 2 : Schéma du ressort étudié

Sous l'action d'une force appliquée en A, le ressort pivote autour du centre de B, la partie C étant astreinte à suivre la ligne S, qui joue le rôle de butée.

Tenant compte de ces conditions de fonctionnement, nous allons dresser la carte des contraintes qui s'établissent alors dans ce ressort.

Nous obtiendrons en certaines zones des valeurs de tensions critiques qui favorisent la rupture, ce qui nous incitera à proposer une nouvelle forme du ressort pour éliminer ce phénomène.

II. Modélisation et calculs numériques

Les concepts généraux de la méthode des éléments finis ont déjà été exposés [2].

Notre problème particulier est ici un cas d'élasticité linéaire en déformations - contraintes planes. Il est régi par les équations de la mécanique des milieux continus [3].

Définissons :

$u = \begin{Bmatrix} u_x(x,y) \\ u_y(x,y) \end{Bmatrix}$: le déplacement au point (x,y)

$\epsilon_{ij}(u)$: le champ du tenseur des déformations

$\sigma_{ij}(u)$: le champ du tenseur des contraintes

f_i : la ième composante du champ de forces volumiques

F_i : la ième composante du champ de forces surfaciques

En composantes, l'équation d'équilibre du système s'écrit :

$$(1) \quad \sum_{j=1}^2 \partial_j \sigma_{ij}(u) + f_i = 0 ; i = 1(\equiv x), 2(\equiv y)$$

Pour de petites déformations et de faibles déplacements, on définit :

$$(2) \quad \epsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) ; i, j = 1, 2$$

et dans le cas d'un matériau isotrope et homogène, la loi de Hooke établit la relation entre contraintes et déformations :

$$(3) \quad \sigma_{ij}(u) = \alpha \sum_{k=1}^2 \epsilon_{kk}(u) \delta_{ij} + 2\mu \cdot \epsilon_{ij}(u) ; i, j = 1, 2$$

avec $\alpha = \lambda$ pour le cas de déformations planes

$$\alpha = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \text{ pour le cas de contraintes planes}$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé, eux-mêmes fonctions du module d'élasticité de Young E et du nombre de Poisson ν :

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Le comportement global de la pièce est encore conditionné par l'imposition de "conditions aux limites", qui sont ici de deux types :

1^o des conditions dites de Neumann, qui rendent compte de l'application de forces extérieures :

$$(4) \sum_{j=1}^2 \sigma_{ij}(u) \cdot n_j = F_i ; i, j = 1, 2$$

(\vec{n} : normale au bord)

2^o des conditions dites de Dirichlet, qui rigidifient certains déplacements ($a_i = 0$) ou les imposent ($a_i =$ valeur donnée) :

$$(5) \quad u_i = a_i ; i = 1, 2$$

Afin de pouvoir être résolu par la méthode des éléments finis, le problème, défini par l'ensemble des équations (1) à (5), doit être posé sous forme variationnelle. Nous sommes donc finalement amenés à calculer le déplacement u appartenant à l'ensemble K des fonctions de carrés sommables, solution de

$$(6) \quad \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(u) \varepsilon_{ij}(v) d\Omega = \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Omega} f_i v_i d\Omega + \int_{\Gamma} F_i v_i d\sigma \right]$$

pour tout $v \in K$

L'étape suivante consiste à définir un recouvrement (maillage) de l'espace bidimensionnel occupé par la pièce. Nous choisissons pour cela des éléments triangulaires droits (Fig. 3).

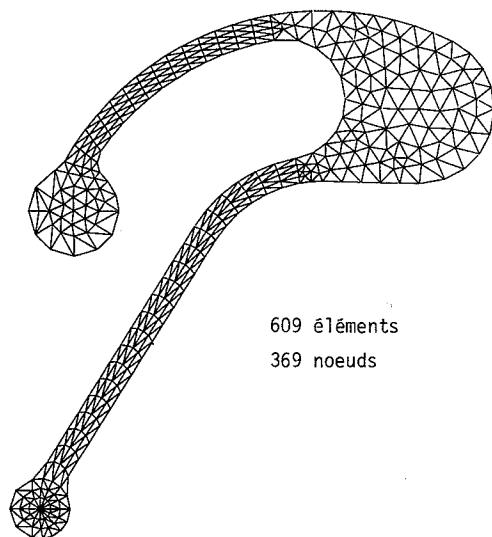


Fig. 3 : Maillage du ressort

On cherche alors les valeurs aux noeuds (ici les sommets des triangles) des déplacements, en approximant ceux-ci sur tout un triangle par des fonctions linéaires (interpolation PI de Lagrange).

Ces déplacements connus, nous sommes capables ensuite d'en déduire les déformations et les contraintes correspondantes, à l'aide des équations (2) et (3).

Comme mentionné plus haut, la précision de nos résultats dépend de la finesse du maillage choisi, les constantes du matériau étant fixées. Pour une géométrie de pièce compliquée, le nombre d'éléments et de noeuds à envisager peut être grand. Par exemple, dans le cas du ressort qui nous intéresse, nous considérons 609 éléments, définis par 369 noeuds (Fig. 3).

Il est donc utile, voire indispensable, de disposer d'une méthode de génération automatique de maillages. Dans ce but, nous avons développé au LSRH un programme interactif, à partir d'algorithmes existants [4], qui permet de générer très rapidement le recouvrement d'une pièce, même complexe. Ce programme offre, entre autres, la possibilité de pouvoir modifier aisément un maillage. Nous sommes ainsi à même, au vu des résultats des calculs, de proposer de nouvelles géométries pour les systèmes élastiques étudiés.

Nous devons encore fournir au programme d'éléments finis les données des constantes physiques du matériau à introduire dans l'expression de la loi de Hooke, en particulier la valeur du module d'élasticité E et le nombre de Poisson.

Nous distinguons le cas de la construction et le cas de l'optimisation.

Dans le cas de la construction, il n'existe aucune pièce fabriquée et on aura accès uniquement à la matière prévue pour la fabrication. Le module élastique se déterminera à l'aide d'essais de flexion sur des barreaux de dimensions proches de celles de la pièce. L'essai de flexion à 2 appuis est à préférer à celui de l'essai avec encastrement, qui est difficile à réaliser. Nous disposons au LSRH des instruments de mesure nécessaires à une telle détermination. Des essais rapides ont montré une précision de 5 % sur des barreaux de $(0.25 \times 0.22 \times 2.30) \text{mm}^3$.

Dans le cas de l'optimisation nous disposons de pièces prototypes. En plus des essais précédents, nous pouvons donc effectuer des contrôles supplémentaires en comparant les forces de fonctionnement et les déplacements, mesurés et

calculés.

Les résultats qualitatifs de nos calculs sont illustrés par les Fig. 4 à 6.

La Fig. 4 montre le ressort en position de repos, ainsi que déformé sous l'action d'une force de 1N appliquée en A.

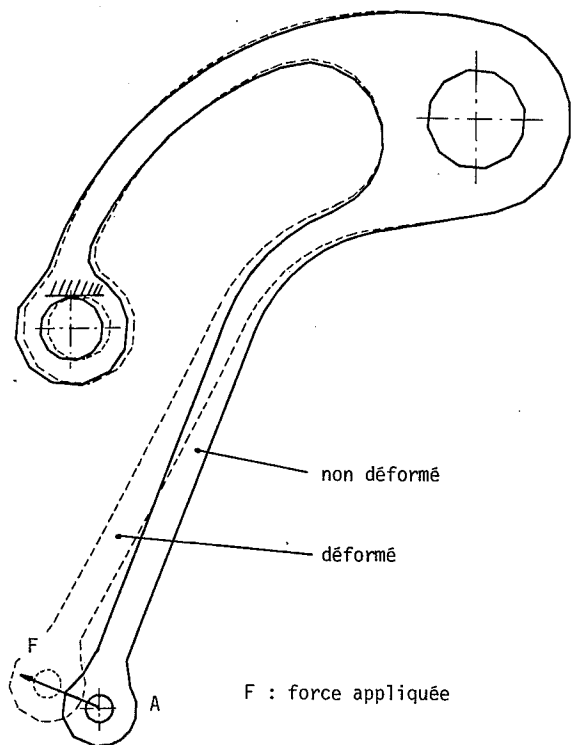


Fig. 4 : Ressort en déformation sous l'action d'une force

Sur la Fig. 5, on observe les contraintes principales, constantes par élément, qui apparaissent à la suite de la déformation de la pièce. On constate que la répartition des tensions dans les bras A-B et C-B est bien conforme à celle que l'on attend dans des barreaux en flexion. Les fluctuations dans l'alignement des contraintes sont dues à la discrétisation du domaine en triangles non infiniment petits.

La Fig. 6 présente les isovaleurs de la trace du tenseur des contraintes ($\sigma_{xx} + \sigma_{yy}$). Cette grandeur, premier invariant de ce tenseur, permet de distinguer les zones à tractions dominantes (valeurs positives) et compressions dominantes (valeurs négatives).

Dans les zones de fortes contraintes en traction (E et F, Fig. 5 et 6), nos calculs donnent les valeurs maximales reportées dans le Tableau 1.

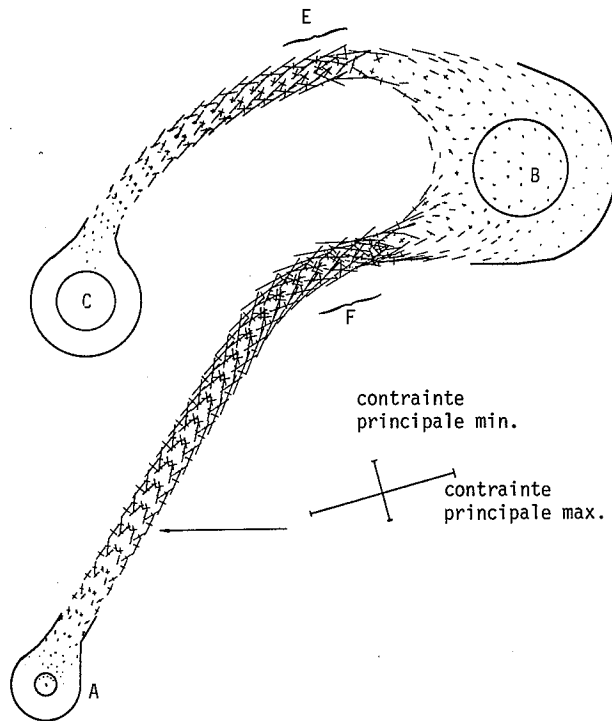


Fig. 5 : Représentation vectorielle des contraintes principales

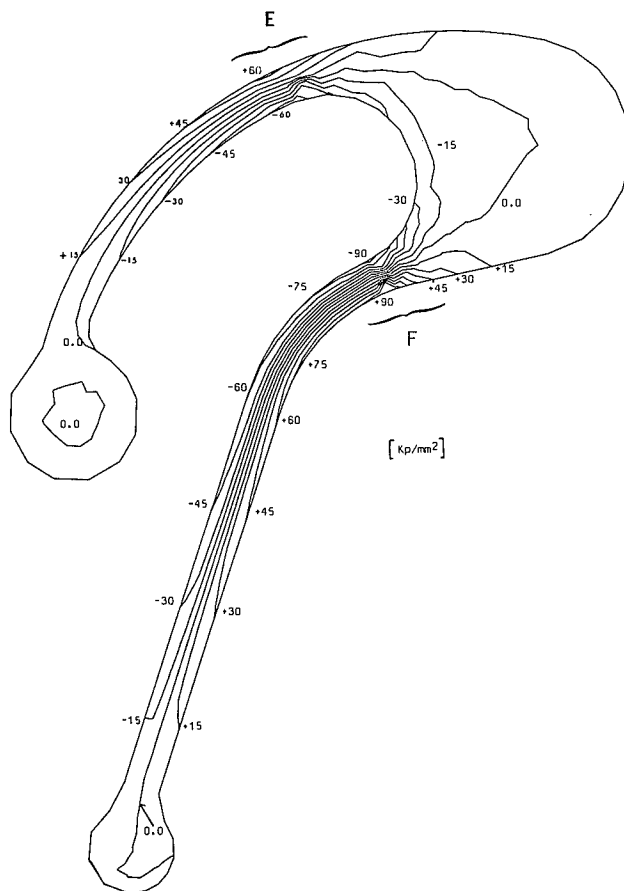


Fig. 6 : Isovaleurs de la trace du tenseur des contraintes

Tableau 1 : Ressort étudié

Zones	Tensions principales maximales [kp/mm ²]
E	81
F	148

Pour le type d'acier utilisé dans la fabrication de ce ressort, on peut admettre une charge maximale d'environ 130 kp/mm².

D'après les valeurs du Tableau 1, on constate donc que la zone F présente des tensions conduisant à la rupture.

III. Comparaison avec les données expérimentales

Un ensemble de 15 ressorts du type de celui qui nous intéresse a été soumis à des mesures de déplacements et de forces. Les résultats des mesures de ces grandeurs présentent une dispersion d'environ 10 %, essentiellement due aux tolérances de forme des ressorts. Nous obtenons donc expérimentalement des résultats relatifs à un ressort "moyen", que nous pouvons comparer à notre modèle mathématique. Le comportement typique d'une pièce en fonctionnement est relevé par photographie (Fig. 7). Nous avons constaté que les déplacements observés coïncident avec ceux calculés et présentés sur la Fig. 4.

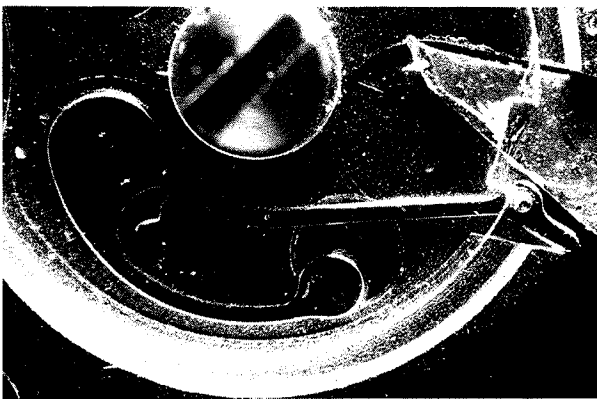


Fig. 7 : Ressort photographié en position de déplacement maximum

La force "moyenne", mesurée à l'aide d'un capteur, provoque un déplacement "moyen" en A. Compte tenu des tolérances sur la forme des ressorts et sur la détermination du module d'élasticité, les résultats des mesures sont en bon accord avec ceux du calcul.

IV. Optimisation

Sur la base des résultats numériques obtenus, relatifs aux tensions élevées régnant en certaines zones du ressort étudié (Tableau 1), on a conclu à la présence d'un risque de rupture de la pièce. Afin de pallier à cet inconvénient majeur, nous modifions la forme du ressort dans la zone M (Fig. 8). Il devrait ainsi travailler dans de meilleures conditions de tensions, sans que son dimensionnement global, ni ses caractéristiques de fonctionnement en soient modifiés pour autant.

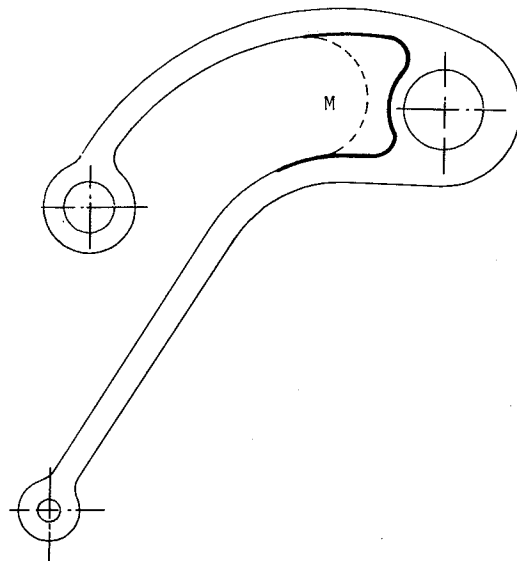


Fig. 8 : Forme optimisée du ressort

Pour tenir compte de cette nouvelle forme, nous modifions la zone M du maillage précédant. Cela s'effectue rapidement à l'aide des programmes de maillages automatiques déjà mentionnés.

Les calculs basés sur cette nouvelle géométrie fournissent une répartition globale des tensions à peu près semblable à celle du premier ressort (Fig. 6 et 9).

On constate cependant (Tableau 2) que les valeurs maximales des tensions principales sont inférieures d'environ 30 % pour le ressort modifié. Elles sont maintenant au-dessous de la tension de rupture.

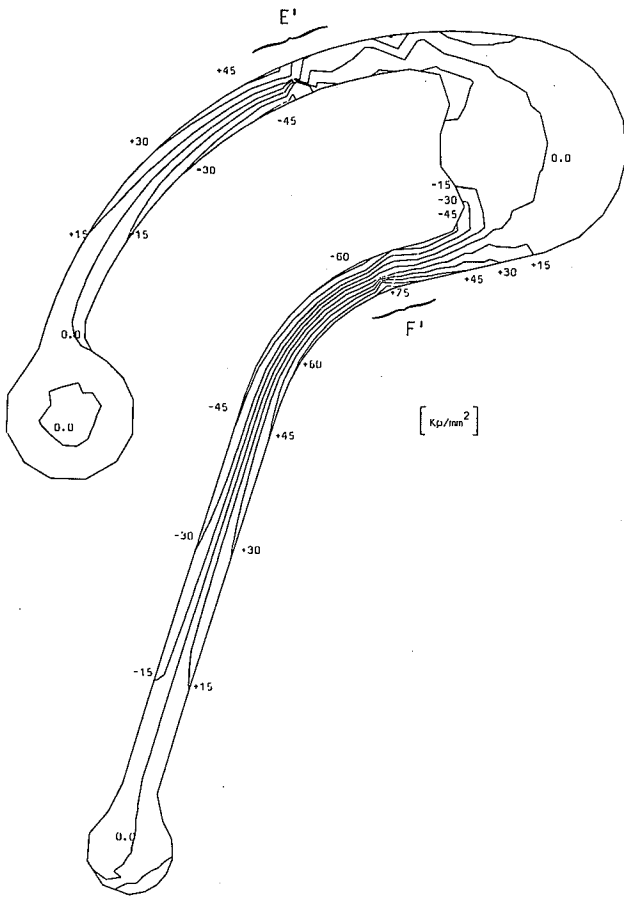


Fig. 9 : Isovaleurs de la trace du tenseur des contraintes, pour la forme modifiée

Relevons que pour obtenir des contraintes extrêmes encore moins élevées, nous pourrions modifier les lames sous forme de poutres d'égale résistance, en variant leur largeur.

Tableau 2 : Ressort modifié

Zones	Tensions principales maximales [kp/mm ²]
E'	66
F'	107

V. Conclusions

Ce travail nous a permis de maîtriser une technique de résolution de problèmes généraux d'élasticité plane, par la méthode des éléments finis.

L'exemple présenté met en évidence la bonne concordance des résultats des calculs avec l'ex-

périence et illustre les possibilités d'optimisation qu'offre une telle technique, grâce à la rapidité d'introduction de nouveaux maillages.

Il faut relever d'autre part combien grande est la quantité d'informations que peut nous fournir cette méthode de calcul par éléments finis, puisqu'il est possible de connaître les déplacements, déformations et contraintes en un point quelconque d'une pièce.

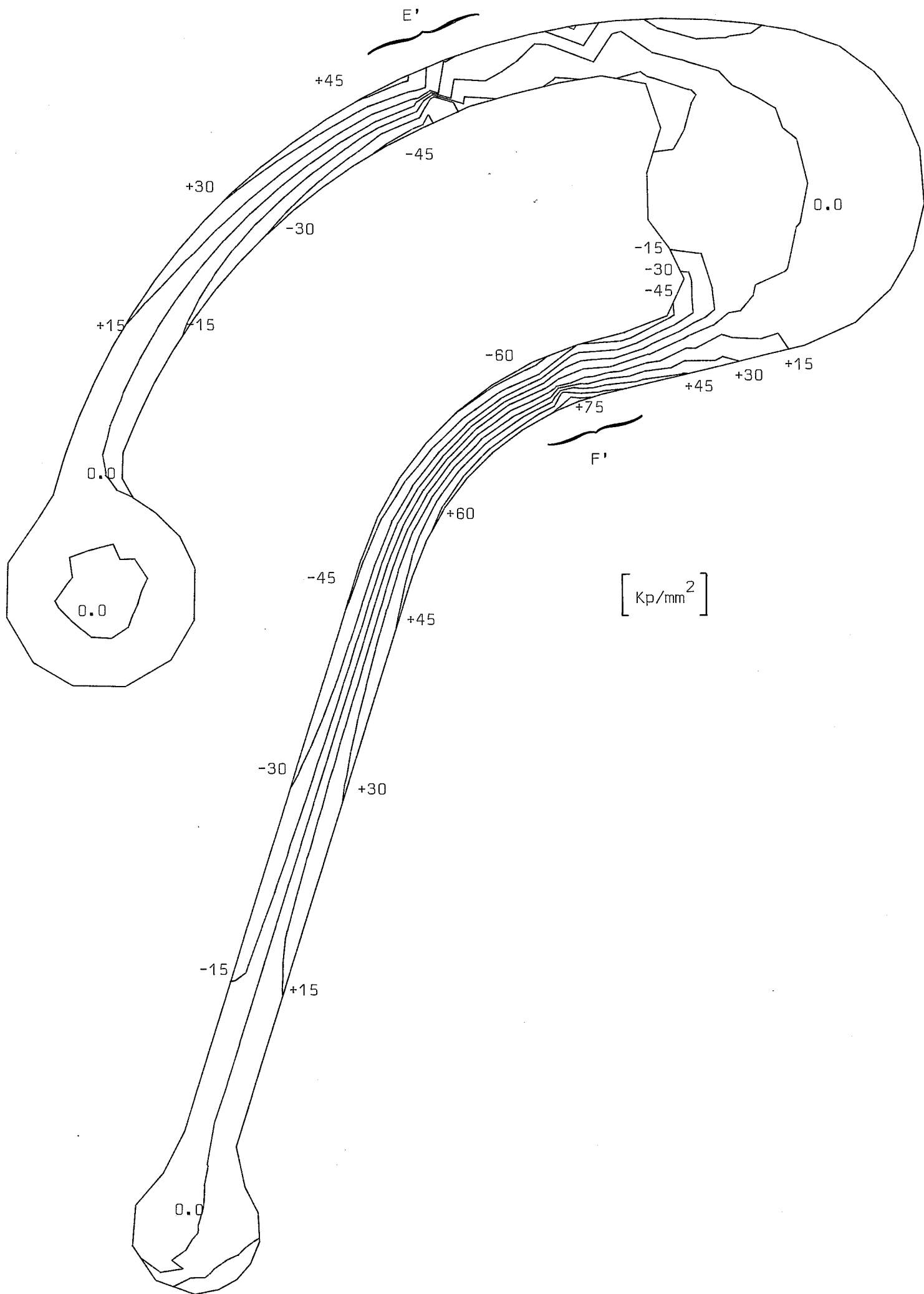
Nous sommes ainsi à même de traiter des demandes d'analyse de pièces en quelques jours, pour autant que nous disposions de plans normalement cotés. Quelques jours supplémentaires sont nécessaires pour effectuer une optimisation complète.

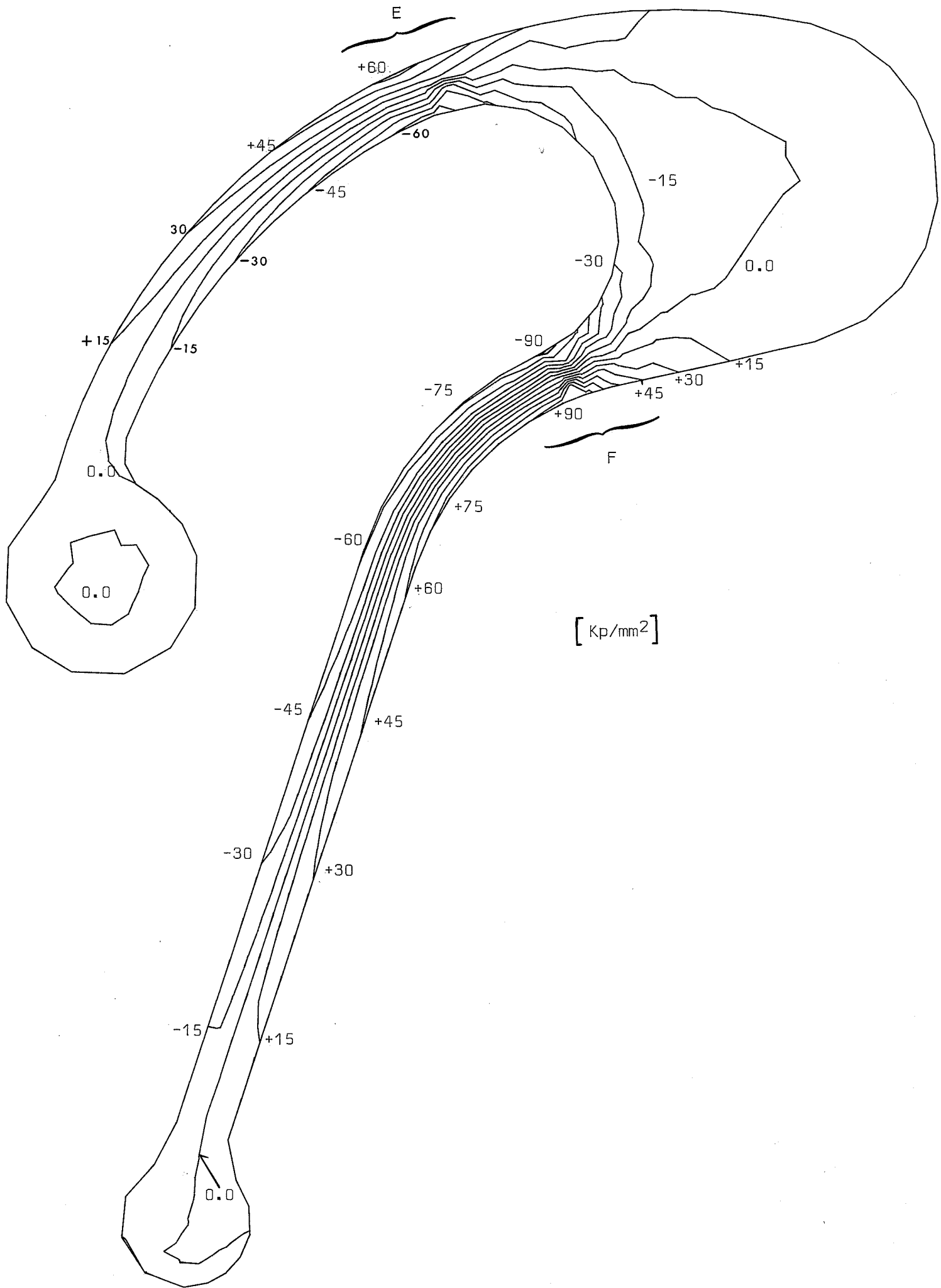
Mentionnons finalement que nous traiterons prochainement des problèmes d'élasticité axi-symétrique et tridimensionnelle.

Ce travail a pu être réalisé grâce à la générosité de la Fondation H. Wilsdorf et au soutien financier de la Commission pour l'Encouragement des Recherches Scientifiques.

Références :

- [1] M. Belot, "Détermination théorique des ressorts et plus généralement des systèmes élastiques" Communication au C.I.C., Genève (1979)
 - [2] Y. Depeursinge, "Application de la méthode des éléments finis à la microtechnique", Communication au 55e Congrès de la SSC, Berne (1980)
- Ouvrages généraux :
- O.C. Zienkiewicz, "La méthode des éléments finis", Mc Graw-Hill Inc., Paris (1979)
- G. Strang et J. Fix, "An analysis of the finite element method", Prentice Hall (1973)
- [3] L. Landau et E. Lifchitz, "Théorie de l'Elasticité", Editions Mir, Moscou (1967)
 - [4] Bibliothèque de programmes du Club Modulef, INRIA, Paris.





zone de fortes contraintes

